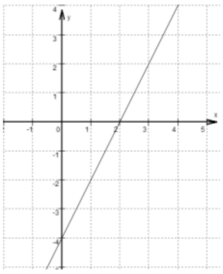
Nullstellenbestimmung einer ganzrationalen Funktion

1. Nullstelle einer linearen Funktion y = mx + b



Beispiel: $y = 2x - 4$

y = 0 setzen: $0 = 2x - 4 \quad | + 4$

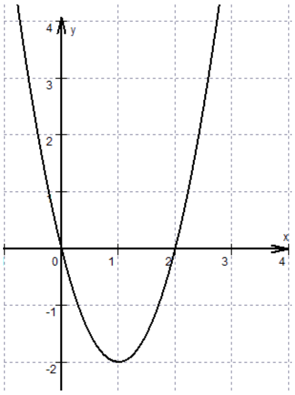
$4 = 2x \quad | : 2$

$2 = x$

$L = \{2\}$

N(2|0)

2. Nullstellen einer quadratischen Funktion



Beispiel 1: $y = 2x^2 - 4x$

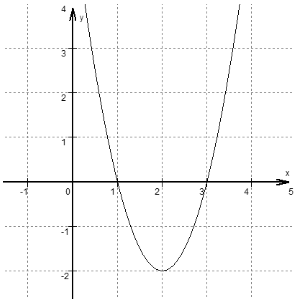
Immer zuerst überprüfen, ob man x ausklammern kann! Da x überall steht, geht das.

$y = x\,(2x-4)$

y = 0 setzen: $x\,(2x-4) = 0$

Dieser Term wird Null, wenn entweder x = 0 oder die Klammer 0 wird. Also

1. Fall: $x = 0$ ➔ $N_1(0|0)$
2. Fall $(2x-4) = 0$ ➔ $2x-4 = 0$ ➔ $2x = 4$ ➔ $x = 2$ ➔ $N_2(2|0)$



Beispiel 2: $y = 2(x-2)^2 - 2$

Auch hier braucht man keine pq-Formel

y = 0 setzen: $0 = 2(x-2)^2 - 2 \quad | : 2$

(*Jedes* Glied der Gleichung durch 2 teilen, außer es steht eine Klammer davor!!! Wird immer wieder gerne vergessen!)

$0 = (x-2)^2 - 1 \quad | +1$

$1 = (x-2)^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm 1 = x - 2 \quad | + 2$

$x_1 = +1 + 2 = 3$

$x_2 = -1 + 2 = 1$

$\mathbb{L} = \{1; 3\}$ ➔ $N_1(1|0)$ und $N_2(3|0)$

Beispiel 3: $y = 2x^2 - 8x + 6$

Dies ist die gleiche Funktion wie in Bsp. 2 nur mit Klammer ausmultipliziert.

Berechne mit der pq-Formel!

y = 0 setzen $\quad 0 = 2x^2 - 8x + 6 \quad | : 2$ Damit x^2 alleine steht.

$0 = x^2 - 4x + 3$

p q

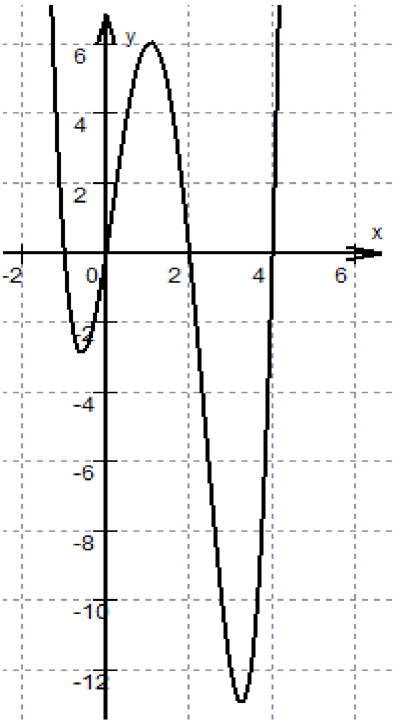
In pq-Formel einsetzen: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3}$$
$$= 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm \sqrt{1} = 2 \pm 1$$

$x_1 = 2 + 1 = 3$
$x_2 = 2 - 1 = 1$
IL = {1; 3} ➔ $N_1(1|0)$ und $N_2(3|0)$

Nullstellen einer Funktion 3. Grades

Beispiel $y = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$



Wir nehmen gleich eine Funktion 4. Grades, da man hier x ausklammern kann.

Immer zuerst prüfen: Kann man x ausklammern?
$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = 0$
$x(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) = 0$ ➔

1. Fall: x = 0 ➔ $x_1 = 0$ ➔ **$N_1(0|0)$**
2. Fall: Klammer gleich 0 setzen.

Also **$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$**

Da dies eine Gleichung 3. Grades ist, wendet man Polynomdivision an:

Zunächst: Eine Nullstelle „erraten“ bzw. ausprobieren: Hier **$x_2 = -1$,** da gilt: $(-1)^3 - 5\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1) + 8 = 0$ Also **$N_2(-1|0)$**.

Wie errät man eine Nullstelle? Man setzt zuerst 1 in die Gleichung und schaut, ob die null wird. Wenn nicht, dann -1, 2, -2, 3, -3 usw. In der Regel sind die Aufgaben so gestellt, dass man leicht eine Nullstelle findet. Ansonsten muss man sich an die Nullstelle annähern. Wird beim Einsetzen eines x-Wertes der y-Wert positiv und beim Einsetzen eines anderen x-Wertes der y-Wert negativ, muss eine Nullstelle dazwischen liegen. Dies gilt natürlich auch umgekehrt, dass zwischen einem negativen und einem positiven y-Wert eine Nullstelle liegen muss. In Klassenarbeiten kommt „krumme“ Nullstellen selten vor.
Aber nun weiter zu den nächsten beiden Nullstellen:

Polynomdivision: Die Gleichung $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ durch (x – Nullstelle) teilen. (Vorsicht bei negativer Nullstelle!). Damit erhalten wir ein Polynom 2. Grades, wo wir wieder die pq-Formel anwenden können.

$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 : (x - (-1)) =$

$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 : (x + 1) = \mathbf{x^2 - 6x + 8}$
$-\underline{(x^3 + x^2)}$
$-6x^2 + 2x$
$-\underline{(-6x^2 - 6x)}$
$+8x + 8$
$-\underline{(+8x + 8)}$

Anmerkung: Teilt man ein Polynom durch (x – Nullstelle) geht die Division immer auf, es bleibt also kein Rest übrig, wenn man richtig gerechnet hat.

Weiter nun mit **$x^2 - 6x + 8 = 0$,** also mit pq-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

(Sollte vor x^2 ein Faktor stehen, dann erst die Gleichung durch diesen Faktor teilen.)

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$x_{1,2} = -(-\frac{6}{2}) \pm \sqrt{\left(-\frac{6}{2}\right)^2 - 8}$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\left(+\frac{36}{4}\right) - 8}$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8}$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{1}$

$x_{1,2} = 3 \pm 1$

$x_1 = 3 - 1 = 2$ ➔ **$N_3(2|0)$**

$x_2 = 3 + 1 = 4$ ➔ **$N_4(4|0)$**

Also die Funktion hat folgende Nullstellen: **$N_1(-1|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(2|0)$ und $N_4(4|0)$**

Anmerkung: Eine Gleichung vom Grad n kann maximal n Nullstellen haben!

Gleichungen 4. Grades:

Gleichungen 4. Grades können wir nur ausrechnen, wenn man wie oben ein x ausklammern kann oder wenn sie folgende Form haben: $y = ax^4 + bx^2 + c$. Dies kann man durch Substitution (substituiere = ersetzen) lösen: Dabei ersetzt man x^2durch z.

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Ersetze $x^2 = z$. Daraus folgt auch $x^4 = z^2$

$z^2 - 7z + 12 = 0$ Nun hat man eine quadratische Gleichung, die man mit pq-Formel lösen kann.

Ergebnis: $z_1 = 4$ und $z_2 = 3$.

Nun muss man wieder Rücksubstituieren. Aus $x^2 = z$ folgt $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$

Also $x_{1,2} = \pm\sqrt{4}$ ➔ $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$ ➔ $x_3 = -\sqrt{3}$ $x_4 = +\sqrt{3}$

Die Nullstellen: **$N_1(-2|0)$, $N_2(2|0)$, $N_3(-\sqrt{3}|0)$ und $N_4(\sqrt{3}|0)$**